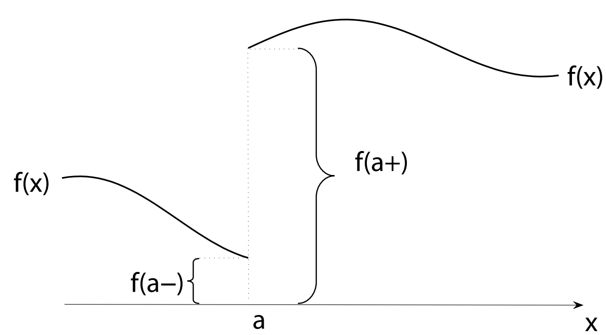
Clase 3: Continuación.

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Derivadas generalizadas de funciones suaves a trozos.

Sea f definida en $\mathbb{R}$ ($c.s.$), de clase C^1 en $(-\infty; a]$ y $[a; \infty)$



$$\sigma_0(a) := f(a+) - f(a-) = \text{salto de } f \text{ en } x = a.$$

Tenemos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $f'_{cl}(x)$ existe $c.s.$ en $\mathbb{R}$ (excepto posiblemente en $x = a$) y $f'_{cl} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ define una distribución regular

$$\langle f'_{cl}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle f'_{gen}, \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = (\text{integración por partes}) \\
&= -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a} + \int\limits_{a}^{\infty} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{a} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{a}^{\infty} \\
&= -f(a-)\varphi(a) + f(a+)\varphi(a) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx \\
&= \sigma_0(a)\varphi(a) + \langle f'_{cl}, \varphi \rangle = \langle \sigma_0(a)\delta_a, \varphi \rangle + \langle f'_{cl}, \varphi \rangle = \langle f'_{cl} + \sigma_0(a)\delta_a, \varphi \rangle,
\end{aligned}
$$

para <u>todo</u> $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) + \sigma_0(a)\delta_a(x). \tag{1}$$

Si f es de clase C^2 en $(-\infty; a]$ y $[a; \infty)$, podemos aplicar (1) a f'_{cl} en lugar de f, es decir

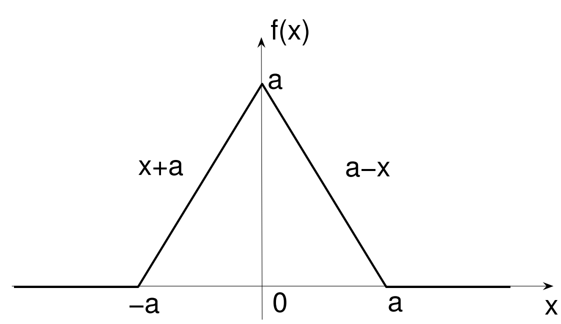
$$(f'_{cl})'_{gen}(x) = f''_{cl}(x) + \sigma_1(a)\delta_a(x),$$

con $\sigma_1(a) = f'_{cl}(a+) - f'_{cl}(a-)$, y luego (1) da

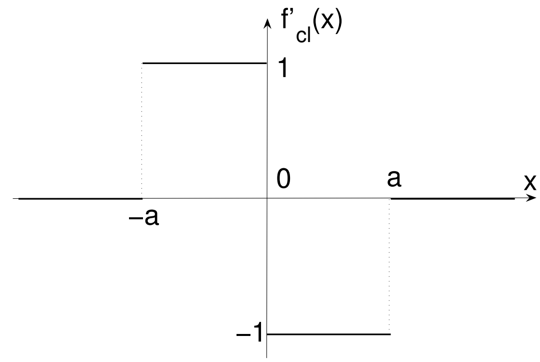
$$f''_{gen} = f''_{cl}(x) + \sigma_1(a)\delta_a(x) + \sigma_0(a)\delta'_a(x), \quad \cdots, \ \textit{etc.}$$

Si hay varios puntos de salto en $x = a_1, \cdots, x = a_n$, entonces cada salto contribuye con un término con $\delta_{a_i}(x)$, $\delta'_{a_i}(x), \cdots$ en las derivadas generalizadas sucesivas.

Ejemplo 1.



$f(x)$ no tiene saltos $\Longrightarrow$ $f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x)$ *c.s. en* $\mathbb{R}$.



Hay tres saltos $\sigma_1(-a) = 1$, $\sigma_1(0) = -2$, $\sigma_1(a) = 1$, *así*

$$f''_{gen}(x) = f''_{cl}(x) + \delta_{-a}(x) - 2\delta(x) + \delta_a(x),$$

pero $f''_{cl}(x) = 0$ *c.s. en* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$f''_{gen}(x) = \delta_{-a}(x) - 2\delta(x) + \delta_a(x),$$

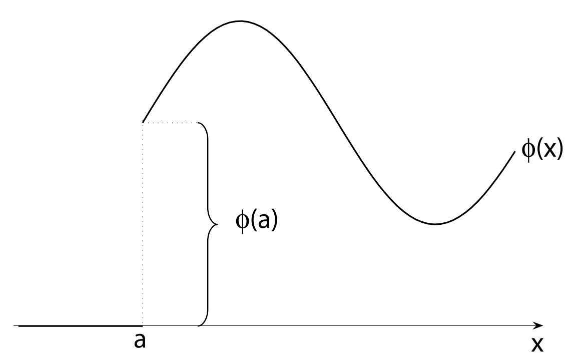
luego

$$f'''_{gen}(x) = \delta'_{-a}(x) - 2\delta'(x) + \delta'_a(x), \cdots, etc.$$

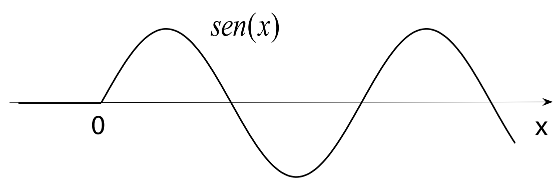
La ecuación para $f'''_{gen}(x)$ *significa que para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *se tiene*

$$\langle f'''_{gen}, \varphi\rangle = \langle \delta'_{-a}, \varphi\rangle - 2\langle \delta', \varphi\rangle + \langle \delta'_a, \varphi\rangle = -\varphi'(-a) + 2\varphi'(0) - \varphi'(a).$$

Ejemplo 2. *Sea* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *y* $f(x) = h_a(x)\phi(x)$.



Entonces
$$f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) + \phi(a)\delta_a(x),$$
pero $f'_{cl}(x) = h_a(x)\phi'(x)$ *c.s. en* $\mathbb{R}$*, de modo que*
$$f'_{gen}(x) = h_a(x)\phi'(x) + \phi(a)\delta_a(x).$$
Luego
$$f''_{gen}(x) = h_a(x)\phi''(x) + \phi'(a)\delta_a(x) + \phi(a)\delta'_a(x),$$
$$f'''_{gen}(x) = h_a(x)\phi'''(x) + \phi''(a)\delta_a(x) + \phi'(a)\delta'_a(x) + \phi(a)\delta''_a(x), \cdots, etc.$$
Por ejemplo con $f(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(x)$



tenemos
$$f'_{gen}(x) = h(x)\cos(x), \quad f''_{gen}(x) = -h(x)\,\mathrm{sen}(x) + \delta(x),$$
$$f'''_{gen}(x) = -h(x)\cos(x) + \delta'(x).$$
Observe que f *satisface la E.D (ecuación diferencial)* $f''_{gen}(x) + f(x) = \delta(x)$*.*

2. Ecuaciones diferenciales en sentido distribucional.

Sea un operador diferencial lineal (ODL)
$$L = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + \cdots + a_n(x)\frac{d^n}{dx^n},\ x \in \mathbb{R},$$
con coeficientes C^∞ $a_0, a_1, \cdots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Considerando las derivadas en sentido distribucional y recordando la definición de la multiplicación ϕT de una $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (de modo que
$$\langle a_k T^{(k)}, \varphi(x)\rangle = \langle T^k(x), a_k(x)\varphi(x)\rangle = (-1)^k\langle T(x), (a_k(x)\varphi(x))^{(k)}\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})),$$

podemos considerar L como un operador diferencial lineal

$$L : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ (T \longrightarrow LT),$$

donde

$$LT(x) = a_0(x)T(x) + a_1(x)T'(x) + \cdots + a_n(x)T^{(n)}(x).$$

Podemos considerar ED en sentido distribucional

$$\begin{gathered} Lu(x) = f(x), \ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ dada,} \\ \text{buscando soluciones } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{2}$$

Mencionemos sin demostración el resultado siguiente:

Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes (ODLCC), entonces la ED homogénea $Lv(x) = 0$ tiene en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ únicamente las soluciones clásicas $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ (es decir: las soluciones distribucionales son la soluciones clásicas). (3)

Las soluciones de $Lv(x) = 0$ se obtienen con los métodos usuales (Mat. IV), y la solución general de $Lu(x) = f(x)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es entonces $u(x) = u_p(x) + v(x)$, donde $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solución general de la ED homogénea y $u_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es una solución particular de $Lu(x) = f(x)$.

Introducimos ahora un concepto supremamente importante (su importancia veremos en el capítulo sobre convolución). Si L es un ODL, entonces una solución fundamental (s.f.) de L es por definición una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$LE(x) = \delta(x), \ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dada una $s.f.$ E, la $s.f.$ general es $\xi(x) = E(x) + v(x)$, donde v es la solución general de la ED homogénea $Lv(x) = 0$. Mencionamos el resultado siguiente:

Si L es un ODLCC, entonces existe una $s.f.$ E de L de la forma

$$E(x) = h(x)\phi(x), \tag{5}$$

para cierta $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (y esta es única).

Ejemplo 3. *Sea* $L = \dfrac{d^2}{dx^2} + k^2$ *($k > 0$ una constante). Buscamos una s.f. de L de la forma*

$$E(x) = h(x)\phi(x), \ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Tenemos

$$E'_{gen}(x) = h(x)\phi'(x) + \phi(0)\delta(x), \quad E''_{gen}(x) = h(x)\phi''(x) + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x)$$

$$\stackrel{(4)}{\Longrightarrow} \quad h(x)\phi''(x) + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x) + k^2 h(x)\phi(x) = \delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad h(x)[\phi''(x) + k^2\phi(x)] + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x) = \delta(x),$$

con lo cual podemos cumplir poniendo

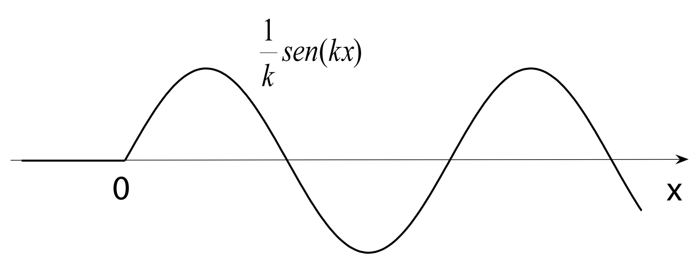
$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0$$
$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 1$$

La ED tiene solución general $\phi(x) = A\cos(xk) + B\,\mathrm{sen}(kx)$ *(saber esto debe ser parte del patrimonio cultural del estudiante). Entonces*

$$\phi(0) = A, \quad \phi(0) = 0 \Longrightarrow \quad A = 0,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\phi(x) = B\,\mathrm{sen}(kx) \quad &\Longrightarrow \quad \phi'(x) = kB\cos(kx) \\
&\Longrightarrow \quad \phi'(0) = kB, \quad \phi'(0) = 1 \\
&\Longrightarrow \quad kB = 1 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{1}{k} \\
&\Longrightarrow \quad E(x) = \frac{1}{k}h(x)\,\mathrm{sen}(kx).
\end{aligned}$$



Verifiquemos que esta $E(x)$ realmente es s.f. de L :

$$E'_{gen}(x) = h(x)\cos(kx), \quad E''_{gen}(x) = -kh(x)\,\mathrm{sen}(kx) + \delta(x)$$

$$\implies \quad E''_{gen}(x) + k^2E(x) = -kh(x)\,\mathrm{sen}(kx) + \delta(x) + kh(x)\,\mathrm{sen}(kx) = \delta(x),$$

como debe ser.

La s.f. general de L es

$$\xi(x) = \frac{1}{k}h(x)\,\mathrm{sen}(kx) + A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx); \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 4. *Sea $L = -\dfrac{d^2}{dx^2} + k^2$ ($k > 0$ una constante). Ponemos $E(x) = h(x)\phi(x)$ como antes, entonces*

$$E'_{gen}(x) = h(x)\phi'(x) + \phi(0)\delta(x), \quad E''_{gen}(x) = h(x)\phi''(x) + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x),$$

$$-E''_{gen}(x) + k^2E(x) = \delta(x)$$

$$\implies \quad -h(x)\phi''(x) - \phi'(0)\delta(x) - \phi(0)\delta'(x) + k^2h(x)\phi(x) = \delta(x)$$

$$\implies \quad h(x)[-\phi''(x) + k^2\phi(x)] - \phi'(0)\delta(x) - \phi(0)\delta'(x) = \delta(x),$$

con lo cual podemos cumplir poniendo

$$\phi''(x) - k^2\phi(x) = 0$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = -1.$$

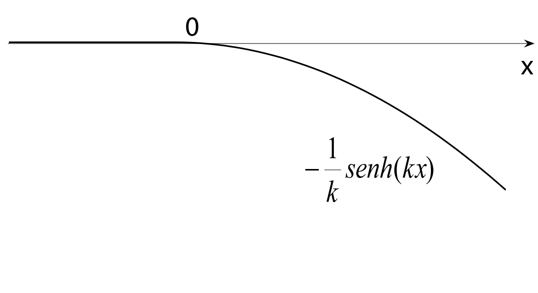
La ED tiene solución general (patrimonio cultural)

$$\phi(x) = A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx) \quad \implies \quad \phi(0) = A = 0$$

$$\implies \quad \phi(x) = B\,\mathrm{senh}(kx) \quad \implies \quad \phi'(x) = kB\cosh(kx)$$

$$\phi'(0) = kB = -1 \quad \implies \quad B = -\frac{1}{k}$$

$$\implies \quad \phi(x) = -\frac{1}{k}\,\mathrm{senh}(kx) \quad \implies \quad E(x) = -\frac{1}{k}h(x)\,\mathrm{senh}(kx)$$



Verificación:

$$E'_{gen}(x) = -h(x)\cosh(kx), \quad E''_{gen}(x) = -kh(x)\operatorname{senh}(kx) - \delta(x)$$

$$\implies \quad -E''_{gen}(x) + k^2 E(x) = kh(x)\operatorname{senh}(kx) + \delta(x) - kh(x)\operatorname{senh}(kx) = \delta(x),$$

correcto.

La s.f. general de L es

$$\xi(x) = -\frac{1}{k}\operatorname{senh}(kx) + A\cosh(kx) + B\operatorname{senh}(kx.)$$

Tomamos $A = B = \dfrac{1}{2k}$, *entonces*

$$x < 0 \ : \ \xi(x) = \frac{1}{2k}\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} + \frac{1}{2k}\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2k}e^{kx}$$

$$x > 0 \ : \ \xi(x) = -\frac{1}{k}\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} + \frac{1}{2k}e^{kx} = \frac{1}{2k}e^{-kx}$$

$$\implies \quad \xi = \begin{cases} \frac{1}{2k}e^{kx}; x < 0 \\ \frac{1}{2k}e^{-kx}; x > 0 \end{cases}$$

$$\implies \quad \xi(x) = \frac{1}{2k}e^{-k|x|} \quad s.f. \ de \ -\frac{d^2}{dx^2} + k^2.$$